Sur la caractéristique d'Euler des feuilletages mesurés

Miguel Bermudez

Sur la caractéristique d'Euler des feuilletages mesurés

Miguel Bermúdez

Universidad Católica del Norte
Antofagasta (Chile)

Résumé

On prouve que la caractéristique d'Euler d'un feuilletage mesuré est nulle si et seulement si celui-ci admet un champ tangent transversalement mesurable dont l'ensemble de singularités est de mesure arbitrairement petite. Si le feuilletage est moyennable, alors on peut construire un tel champ sans singularités. Si les feuilles sont de dimension deux, l'annulation de la caractéristique d'Euler implique la moyennabilité; plus encore, elle équivaut à l'existence d'une action mesurable de $\mathbb{R}^2$ sur la variété ambiant qui est continue et localement libre sur chaque feuille.

1 Introduction

La caractéristique d'Euler d'un feuilletage mesuré a été introduite par Connes dans [9]. Il y définit également les nombres de Betti du feuilletage comme étant les dimensions moyennes des espaces de i-formes harmoniques de carré intégrable sur les feuilles et démontre une version feuilletée du théorème de Gauss-Bonnet, selon lequel la caractéristique d'Euler est égale à la somme alternée des nombres de Betti. Ce résultat est un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général obtenu par Connes qui concerne l'indice d'une famille continue d'opérateurs elliptiques sur les feuilles, et qui généralise le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer [4]. Le théorème de l'indice feuilleté met donc en relation des invariants analytiques du feuilletage et des propriétés géométriques "moyennes" des feuilles. Ce lien est illustré par Connes avec un joli corollaire du théorème de Gauss-Bonnet feuilleté: si la caractéristique d'Euler d'un feuilletage mesuré de dimension deux est strictement positive, alors l'ensemble des feuilles sphériques est de mesure non nulle. Plus tard Connes et Skandalis [11] généralisent aux feuilletages le théorème de l'indice pour les familles démontré

Email address: `bermudez@igd.univ-lyon1.fr` (Miguel Bermúdez).

Preprint submitted to Funtional Analysis

par Atiyah et Singer dans [5] en répondant ainsi à une question déjà évoquée dans [9]. Le résultat de [9] est un corollaire de celui de [11]. Notre but dans ce papier est d'interpréter la caractéristique d'Euler feuilletée comme obstruction à la construction de sections du fibré tangent au feuilletage continues le long des feuilles et transversalement mesurables. Ceci nous permet entre autre de donner une preuve géométrique du théorème de Gauss-Bonnet feuilleté de [9].

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage orientable de dimension n (qu'on supposera pour simplifier de classe C^∞ le long des feuilles) sur une variété lisse compacte M, munie d'une mesure transverse invariante μ. On appellera dans ce papier le triplet $(M, \mathcal{F}, \mu)$ un *feuilletage mesuré*. En intégrant les p-formes différentielles de M sur les feuilles puis relativement à la mesure transverse on définit un courant fermé $C_\mu : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ appelé *courant de Ruelle-Sullivan* [26]. Sa classe d'homologie $[C_\mu] \in H_n(M; \mathbb{R})$ est souvent interprétée comme la classe fondamentale du feuilletage mesuré $(M, \mathcal{F}, \mu)$. On définit la *caractéristique d'Euler* de $(M, \mathcal{F}, \mu)$ par

$$\chi(M, \mathcal{F}, \mu) = \langle e(T\mathcal{F}), [C_\mu] \rangle$$

où $e(T\mathcal{F})$ est la classe d'Euler du n-fibré tangent au feuilletage $T\mathcal{F} \to M$. Dans ce papier on fait le lien entre la caractéristique d'Euler du feuilletage et les sections du fibré tangent $T\mathcal{F}$, et retrouvons dans ce cadre des versions des résultats classiques bien connus pour les variétés compactes. Le contexte où nos résultats sont valables est en fait bien plus large que celui des feuilletages des variétés compactes, et contient celui des laminations (l'espace ambiant n'est plus un variété) et des feuilletages mesurables (la régularité transverse est supposée seulement mesurable). Par souci de clarté nous avons voulu nous restreindre dans ce papier au cas plus simple des feuilletages des variétés compactes. Tous les objets seront donc topologiques, à l'exception des champs de vecteurs et les métriques de Riemann, qui seront supposés continus le long des feuilles mais seulement mesurables transversalement. De tels objets seront souvent appelés *de classe* MC^r pour mesurable et continu de classe C^r. L'intérêt de considérer des objets dans cette catégorie est illustré par les équivalences énoncées dans les théorèmes B et C, en particulier le second. Ils ne sont pas vrais si l'on considère des objets transversalement continus !

Nous commençons par une version feuilletée du théorème classique de Poincaré-Hopf:

Théorème A *Soit* $\mathbf{X}$ *un champ tangent à* $\mathcal{F}$ *de classe* MC^0 *et soit* $O_{\mathbf{x}}$ *l'ensemble des zéros de* $\mathbf{X}$*. Si la trace de* $O_{\mathbf{X}}$ *sur* μ*-presque toute feuille est discrète dans cette feuille, i.e. si* $O_{\mathbf{X}}$ *est une transversale mesurable de* $(M, \mathcal{F}, \mu)$*, alors l'indice local* $ind_{\mathbf{X}}(x)$ *est défini pour* μ*-presque tout* $x \in O_{\mathbf{X}}$*. Si la fonction mesurable à valeurs entières* $ind_{\mathbf{X}}$ *est dans* $L^1(O_{\mathbf{X}}, \mu)$ *alors on* *a:*

$$\chi(M, \mathcal{F}, \mu) = \int_{O_{\mathbf{X}}} ind_{\mathbf{X}}(x) d\mu(x).$$

Il avait déjà été remarqué par Connes dans [9] que ce résultat est vrai pour un champ continu transverse à la section nulle de $T\mathcal{F}$. Ce fait est facile à prouver et découle automatiquement de la construction topologique de la classe $e(T\mathcal{F})$. L'idée est de voir la fonction indice $ind_{\mathbf{x}}$ comme un n-cocycle cellulaire de M, puis de montrer que sa classe de cohomologie ne dépend pas du champ choisi. On définit ainsi un élément de $H^n(M)$ qui s'avère être $e(T\mathcal{F})$ pour des raisons de naturalité. Ce raisonnement ne s'applique pas au cas des champs transversalement mesurables. Ils ne définissent pas une classe dans $H^n(M)$, mais un élément dans un groupe de cohomologie simpliciale mesurable similaire à ceux utilisés dans [24]. Celui-ci ne dépend pas de la topologie de M mais seulement de celle des feuilles, et puis aussi de la dynamique mesurable transverse du feuilletage.

On développera ici les outils de base nécessaires pour expliciter l'information géométrique et ergodique contenue dans ces groupes de cohomologie mesurable, et préciser la relation qui existe entre cette cohomologie et la cohomologie classique de M où l'on situe habituellement les invariants qui nous intéressent.

Théorème B *Soit $(M, \mathcal{F}, \mu)$ un feuilletage mesuré ergodique. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\chi(M, \mathcal{F}, \mu) = 0$.
(2) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un champ tangent $\mathbf{X}(\epsilon)$ de classe MC^∞ et à singularités non dégénérées sur $(M, \mathcal{F})$ tel que $\mu(O_{\mathbf{X}(\epsilon)}) < \epsilon$.

Rappelons qu'un feuilletage mesuré $(M, \mathcal{F}, \mu)$ est dit *moyennable* (cf. [10,1,28]) s'il existe une famille de fonctionnelles continues (dites moyennes)

$$m_x : L^\infty(L_x) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \in M$$

vérifiant les conditions suivantes:

(1) $m_x(f) \geq 0$ si $f \geq 0$;
(2) $m_x(\mathbf{1}) = 1$;
(3) $m_x = m_y$ si x et y appartiennent à la même feuille;
(4) Pour toute fonction mesurable bornée $f : M \to \mathbb{R}$ la fonction $m(f) : M \to \mathbb{R}$ définie par $m(f)(x) = m_x(f|L_x)$ est mesurable.

Pour les feuilletages moyennables le théorème B peut être amélioré de la façon suivante:

Théorème C *Soit* $(M, \mathcal{F}, \mu)$ *un feuilletage mesuré ergodique moyennable. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\chi(M, \mathcal{F}, \mu) = 0$*;*
(2) Le feuilletage possède un champ tangent sans zéro de classe MC^∞*.*

Les théorèmes B et C peuvent très probablement être rassemblés dans un seul théorème C′ en enlevant l'hypothèse de moyennabilité. Le problème est légèrement plus simple si l'on suppose que les feuilles sont de dimension impaire. On peut prouver dans ce cas que l'obstruction à l'existence d'un champ tangent sans zéro de classe MC^∞ est d'ordre deux dans la cohomologie feuilletée mesurable de $(M, \mathcal{F}, \mu)$. Il suffirait alors pour établir le théorème C′ de prouver que cette cohomologie n'a pas de torsion en dimension maximale. Ceci est vrai si le feuilletage vérifie la dualité de Poincaré pour la cohomologie mesurable.

Il existe des feuilletages non moyennables et à caractéristique d'Euler nulle. Par exemple la suspension d'une représentation fidèle du groupe fondamental d'une surface de genre ≥ 2 dans le groupe des isométries d'une variété de Riemann compacte fournit un feuilletage mesuré par plans hyperboliques non moyennable (voir [28]). En le multipliant par un tore de dimension p, on obtient un feuilletage mesuré de dimension $p + 2$, qui est toujours non moyennable, mais dont la caractéristique d'Euler est nulle à cause du caractère multiplicatif de celle-ci. Tous les feuilletages de dimension 1 sont à caractéristique d'Euler nulle. Comme dans le cas classique des variétés compactes, c'est en dimension deux où la caractéristique d'Euler donne le plus de renseignements, comme le montre notre prochain théorème.

Étant donnée une métrique de Riemann de classe MC^∞ sur un feuilletage mesuré $(M, \mathcal{F}, \mu)$, on peut définir une mesure globale sur l'espace M qui est localement définie comme mesure produit du volume vol_g sur les feuilles et de la mesure transverse invariante μ, et qu'on notera $\mu \otimes vol_g$. On dira que g est *à volume* μ*-fini* si cette mesure est de masse totale finie, i.e. $\mu \otimes vol_g(M) < \infty$. Remarquons enfin que la compacité de M implique que toute métrique de Riemann continue sur le feuilletage mesuré $(M, \mathcal{F}, \mu)$ est à géométrie bornée et volume μ-fini. Ce n'est évidemment pas le cas en général des métriques transversalement mesurables, sur lesquelles on est obligé de rajouter ces hypothèses naturelles.

Théorème D *Soit* $(M, \mathcal{F}, \mu)$ *un feuilletage mesuré ergodique de dimension deux et dont* μ*-presque toutes les feuilles sont orientables. Alors les sept conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\chi(M, \mathcal{F}, \mu) = 0$*;*
(2) $(M, \mathcal{F}, \mu)$ *possède un champ tangent sans zéro de classe* MC^∞*;*

(3) Toute métrique de Riemann de classe MC^∞ à volume μ-fini et à géométrie bornée est parabolique, i.e. le revêtement universel de μ-presque toute feuille est conformément équivalent au plan euclidien $\mathbb{C}$;

(4) $(M,\mathcal{F},\mu)$ est moyennable et μ-presque toutes ses feuilles sont des tores, des cylindres ou des plans;

(5) Il existe une application mesurable $\rho : M \to \mathbb{T}^2$ qui est un revêtement en restriction à chaque feuille. Autrement dit, le feuilletage est mesurablement isomorphe à la suspension d'une action mesurable ergodique de $\mathbb{Z}^2$ sur un espace de Lebesgue.

(6) Le feuilletage est défini par une action de $\mathbb{R}^2$ sur M de classe MC^∞, i.e. il existe une action mesurable de $\mathbb{R}^2$ sur M qui est lisse et localement libre le long de chaque feuille.

(7) La feuilletage possède une métrique de Riemann de classe MC^∞ qui est plate et complète sur chaque feuille.

Ce résultat caractérise complètement les feuilletages à caractéristique d'Euler nulle aussi bien d'un point de vue métrique que dynamique. Une partie de la preuve est développée dans [6] pour des feuilletages boréliens i.e. en absence de mesure transverse. Dans [6] nous prouvons dans ce cadre plus général que les conditions (4) et (5) sont équivalentes à l'hyperfinitude du feuilletage au sens de [22]. On prouve également que l'existence d'une métrique parabolique implique la moyennabilité du feuilletage. Nous avons dans l'énoncé trois implications évidentes: (5)⇒(6), (6)⇒(7) et (5)⇒(2). Afin de refermer le cercle d'implications on établit ici (2)⇒(1)⇒(3). La première est une conséquence directe du théorème A et la deuxième consiste à prouver que, étant donnée une métrique de Riemann g de classe MC^∞, volume μ-fini et géométrie bornée sur $(M,\mathcal{F},\mu)$, la caractéristique d'Euler est égale à l'indice au sens de Connes [9] de l'opérateur d'Euler feuilleté $D_g = d_\mathcal{F} + d^*_\mathcal{F}$, où $d_\mathcal{F}$ est la différentielle extérieure le long des feuilles (qui est un opérateur globalement continu si les changements de cartes sont transversalement continus) et $d^*_\mathcal{F}$ est l'adjoint formel de $d_\mathcal{F}$ relativement à la métrique g, qui est seulement transversalement mesurable. Plus précisément, soient D^+_g et D^-_g les opérateurs obtenus par restriction de D_g aux formes de degré paire et impaire respectivement. Alors D^-_g est l'adjoint formel de D^+_g. En dimension deux et si la mesure μ n'a pas d'atome, l'indice de D^-_g est la dimension de Murray-von Neumann du fibré mesurable en espaces de Hilbert des 1-formes harmoniques à carré intégrable sur les feuilles. Si celle-ci est zéro alors l'ensemble des feuilles hyperboliques est de mesure nulle. La preuve étant valable en toute dimension, nous avons la généralisation suivante du théorème de Gauss-Bonnet prouvé par Connes dans [9] par des méthodes analytiques et pour des métriques de Riemann continues.

Théorème E *Soit $(M,\mathcal{F},\mu)$ un feuilletage mesuré muni d'une métrique de Riemann g de classe MC^∞. Si g est de volume μ-fini et à géométrie bornée,* *alors on a:*

$$\dim_\mu \ker D_g^+ - \dim_\mu \ker D_g^- = \chi(M, \mathcal{F}, \mu).$$

Dans le cas d'une métrique de classe MC^∞ qui serait quasi-isométrique à une métrique de Riemann continue le résultat découle automatiquement de celui de Connes (cf. [19]). Nos conditions sur la métrique sont bien faibles mas naturelles; elles servent simplement à garantir que l'indice de l'opérateur D_g est un nombre fini. La preuve de Connes ne semble pas être facilement adaptable au cas des métriques mesurables, car le recours à la topologie transverse est assez important. Notre preuve, de nature purement géométrique, consiste à trouver un champ tangent de classe MC^0 dont l'indice moyen coïncide avec l'indice de l'opérateur D_g. Le théorème A permet alors de conclure. Des méthodes analogues pourraient sans doute être appliqués pour établir une formule de l'indice pour d'autres familles mesurables d'opérateurs de Dirac [3]. Pour compléter une preuve du théorème de l'indice général dans ce contexte il faudrait élaborer néanmoins un calcul pseudo-différentiel puis une théorie de Fredholm analogues à ceux de [8,9] pour des opérateurs transversalement mesurables.

Ce papier comporte deux parties. La première, composée des §1,§2 et §3, contient des développements généraux nécessaires pour la preuve des cinq théorèmes énoncés. Tous les résultats dans cette partie seront établis dans un cadre borélien. On s'intéresse dans cette partie à des applications *de classe* BC^0, i.e. continues le long des feuilles et globalement boréliennes. Au §1 on démontre quelques résultats basiques de la théorie des feuilletages mesurables, dont le théorème d'approximation simpliciale. Au §2 on développe une théorie de l'obstruction analogue à celle de [14] qui nous permet de résoudre complètement le problème de l'extension d'une application de classe BC^0. Au §3 on applique les résultats du §2 au cadre des fibrés localement triviaux pour donner une construction géométrique des classes caractéristiques feuilletées mesurables. On y résout le problème de la construction de sections de classe BC^0 d'un fibré localement trivial. La deuxième, composée du §4, contient la preuve des théorèmes A, B, C, D et E proprement dite. On y précise la notion de mesure transverse et d'application *de classe* MC^0, i.e. des applications continues le long des feuilles qui sont boréliennes une fois qu'on a enlevé un ensemble de feuilles de mesure nulle.

2 Quelques résultats préliminaires

On démontre ici quelques résultats techniques basiques nécessaires pour la suite. Nous rappelons qu'un espace de Borel standard est un espace mesurable isomorphe à un borélien d'un espace de polonais. Presque tous les espaces mesurables qui apparaissent en topologie sont de ce type. Il est connu qu'un espace de Borel standard est soit discret dénombrable, soit isomorphe à l'intervalle $[0,1]$ de la droite réelle.

2.1 Le théorème de Kallman

L'une des difficultés qu'on retrouve au moment d'établir les résultats énoncés dans l'introduction est la construction de sections boréliennes de certaines applications boréliennes ou continues. Le résultat suivant, prouvé par Kallman, est un outil fondamental pour résoudre ces difficultés:

Théorème 2.1 ([21]) *Soit Y un espace polonais et X un espace de Borel standard. Soit $f : Y \to X$ une application surjective borélienne dont la fibre $f^{-1}(x)$ en chaque point $x \in X$ est réunion dénombrable de compacts de Y. Alors f possède une section borélienne, i.e. il existe une application borélienne $s : X \to Y$ telle que $f \circ s(x) = x$ pour tout $x \in X$.*

En fait on n'aura besoin, la plus part du temps, que du corollaire suivant, dont une preuve peut être trouvée aussi dans [23]:

Corollaire 2.2 *Soit $f : Y \to X$ une application borélienne surjective entre deux espaces de Borel standard. Si $f^{-1}(x)$ est dénombrable pour tout $x \in X$, alors f possède une section borélienne.*

2.2 Familles boréliennes d'applications

Soient B et F deux espaces polonais connexes. On considère l'espace des applications continues $C(B,F)$ muni de structure mesurable engendrée par la topologie compacte-ouverte. Rappelons que cette topologie est définie par la sous-base

$$\mathcal{V}(K,U) = \{f \in C(B,F) \mid f(K) \subset V\}$$

où K parcourt les compacts de B et U les ouverts de F. L'espace $C(B,F)$ est un espace de Borel standard.

Soit T un espace de Borel standard et $g : B \times T \to F$ une application borélienne pour la topologie produit et continue le long des horizontales $B \times \{t\}$ qui sera dite *de classe* BC^0 (pour borélienne et continue C^0). Pour tout $t \in T$, g détermine par restriction un élément $g_\star(t) \in C(B,F)$ et nous avons ainsi une application $g_\star : T \to C(B,F)$ dite *verticale* de g. Le résultat suivant caractérise les applications de classe BC^0 comme celles dont les verticales sont boréliennes. Le lecteur remarquera que la continuité de g le long des horizontales est utilisée de façon essentielle dans la preuve. D'un autre coté, on ne peut pas espérer un résultat similaire dans le cadre purement borélien, car la verticale $g_\star$ est alors à valeurs dans l'espace $\mathcal{B}(B, F)$ des applications boréliennes de B dans F, qui n'est muni d'aucune structure mesurable naturelle.

Proposition 2.3 *Soient B et F deux espaces polonais, et supposons B localement compact. Une application $g : B \times T \to F$ est de classe BC^0 si et seulement si elle est continue le long des horizontales et l'application $g_\star : T \to C(B, F)$ est borélienne.*

Démonstration. Supposons que g est de classe BC^0. On veut montrer que $g_\star$ est borélienne. Pour cela il suffit de vérifier que l'image inverse par $g_\star$ d'un ouvert de la forme $\mathcal{V}(K, U)$ est un borélien de T. On se fixe K un compact de B et U un ouvert de F. On remarque d'abord l'identité

$$g_\star^{-1}(\mathcal{V}(K, U)) = T - \pi_T(K \times T - g^{-1}(F - U))$$

où π_T est la projection de $K \times T$ sur le deuxième facteur. Puisque g est continue le long des plaques, les fibres du borélien $K \times T - g^{-1}(F - U)$ pour l'application π_T sont ouvertes dans K. Celui-ci étant un espace polonais compact, tous ces ouverts sont σ-compacts. On peut alors appliquer le théorème 2.1 pour en déduire que l'ensemble $g_\star^{-1}(\mathcal{V}(K, U))$ est un borélien de T.

Inversement supposons que $g_\star$ est borélienne; on veut montrer qu'il en est de même pour g. Il suffit de vérifier que l'image inverse par g de tout ouvert U de F est un borélien de $B \times T$. Soit K un compact de B. L'application de restriction

$$\mathfrak{r}_K : C(B, F) \to C(K, F)$$

est continue relativement aux topologies compactes-ouvertes, donc borélienne. L'application verticale $g_\star$ étant elle aussi borélienne par hypothèse, on en déduit que l'ensemble

$$T_K = \{t \in T \mid \forall x \in K,\ g(x, t) \in U\}.$$

est un borélien de T qui vérifie par construction que $K \times T_K \subset g^{-1}(U)$. Puisque B est supposé localement compact, il possède un base dénombrable formée par des compacts K_j; nous aurons alors $\bigcup_j K_j \times T_{K_j} \subset g^{-1}(U)$.

On complète la preuve de la proposition en démontrant l'inclusion inverse $g^{-1}(U) \subset \bigcup_j K_j \times T_{K_j}$. Pour ce faire nous prenons un point dans $g^{-1}(U)$, i.e. une paire $(x, t) \in B \times T$ telle que $g(x, t) \in U$. Mais $g_\star(t)$ étant continue, il existe un voisinage ouvert V de x telle que $g(y, t) \subset U$ pour tout $y \in V$. Puisque $\{K_j\}_j$ est une base de B, il existe un j tel que $x \in K_j \subset V$. On a alors $g(y, t) \in U$ pour tout $y \in K_j$, ce qui signifie que $t \in T_{K_j}$. $\square$

Soit $\mathcal{H}$ un complexe simplicial fini et $\mathcal{L}$ un complexe simplicial connexe et localement fini. On note $|\mathcal{H}|$ et $|\mathcal{L}|$ les réalisations géométriques de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ respectivement. Soit $g : |\mathcal{H}| \to |\mathcal{L}|$ une application continue. On rappelle qu'une application simpliciale $h : |\mathcal{H}| \to |\mathcal{L}|$ est une *approximation simpliciale* de g si

$$g(star(v, \mathcal{H})) \subset star(h(v), \mathcal{L})$$

pour tout sommet $v \in \mathcal{H}^0$ où $star(v, \mathcal{H})$ désigne l'étoile ouverte de v dans $\mathcal{H}$. On notera comme d'habitude $sd(\mathcal{H})$ le complexe simplicial obtenu par subdivision barycentrique de $\mathcal{H}$ et $sd^n(\mathcal{H}) = sd(sd^n(\mathcal{H}))$ avec $sd^0(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. La preuve du résultat classique suivant peut être trouvée dans [25]:

Théorème 2.4 (d'approximation simpliciale finie) *Soit $\mathcal{H}$ un complexe simplicial fini et $f : |\mathcal{H}| \to |\mathcal{L}|$ une application continue. Alors il existe un $n \in \mathbb{N}$ et une approximation simpliciale $h : |sd^n(\mathcal{H})| \to |\mathcal{L}|$ de f.*

On notera $\Sigma(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$ l'ensemble des applications continues $f \in C(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$ qui sont simpliciales modulo une subdivision barycentrique de $\mathcal{H}$. On munit $C(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$ de la métrique $d^*_{\mathcal{L}}$ de la convergence uniforme relative à la métrique simpliciale $d_{\mathcal{L}}$. On appellera *application d'approximation simpliciale* toute application borélienne

$$\mathfrak{a} : C(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|) \to \Sigma(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$$

telle que $\mathfrak{a}(g)$ est une approximation simpliciale de g pour toute $g \in C(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$. Le théorème 2.4 montre qu'une application de ce type existe, mais ne dit rien à propos de la régularité qu'on peut en espérer. Elle ne peut pas être continue car $\mathcal{H}$ est un complexe fini et l'ensemble $\Sigma(|H|, |\mathcal{L}|)$ est dénombrable. Le résultat suivant montre qu'elle peut être supposée borélienne. La preuve consiste en fait à redémontrer 2.4 de façon constructive. Notre intérêt par les preuves constructives dans ce cas et dans bien d'autres tout au long de ce papier n'est pas d'origine philosophique mais purement pratique: ce sont les seules qui s'adaptent canoniquement au cadre borélien qui nous occupe.

Théorème 2.5 *Pour tout complexe simplicial fini $\mathcal{H}$ et tout complexe simplicial dénombrable $\mathcal{L}$ il existe une application d'approximation simpliciale borélienne*

$$\mathfrak{a} : C(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|) \to \Sigma(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|).$$

Démonstration. On remarque d'abord que pour toute $g \in C(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$ il existe un entier n tel le diamètre de l'image par g de l'étoile de tout sommet de $sd^n(\mathcal{H})$ est inférieur où égal à $1/2$. Ceci est une conséquence d'une part de la continuité de g et d'autre part de la compacité de $|\mathcal{H}|$. On définit $\mathfrak{n}(g)$ comme étant le plus petit des ces entiers n. Il est très facile de voir que l'application

$$\mathfrak{n} : C(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|) \to \mathbb{N}$$

est borélienne. On posera $Q_m = \mathfrak{n}^{-1}(m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Pour toute $h \in \Sigma(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$ soit $d(h)$ le plus petit entier n tel que h est simpliciale relativement à $sd^n(\mathcal{H})$ et $\mathcal{L}$. On note $B(h)$ l'intersection du borélien $Q_{d(h)}$ avec la boule de centre h et rayon $1/2$. La famille des $B(h)$, où h parcourt les éléments de $\Sigma(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$, est d'après le théorème 2.4 un recouvrement dénombrable de $C(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$. On numérote les éléments $\Sigma(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$ et on pose

$$X_{k+1} = B(h_{k+1}) - X_k$$

avec $X_1 = B(h_1)$.

Pour toute $g \in C(|\mathcal{H}|, |\mathcal{L}|)$ on définit $\mathfrak{a}(g)$ comme étant égale à h_k pour $x \in X_k$. L'application ainsi construite est borélienne car constante sur les éléments d'une partition borélienne dénombrable. Il ne reste qu'à montrer que $\mathfrak{a}(g)$ est une approximation simpliciale de g. Par construction g est dans la boule de centre $\mathfrak{a}(g)$ et rayon $1/4$. Ceci implique que pour tout sommet v de $sd^{\mathfrak{n}(g)}(\mathcal{H})$, la distance entre $\mathfrak{a}(g)(v)$ et $g(v)$ est $< 1/4$. Une application directe de l'inégalité triangulaire montre alors que $g(star(v, sd^{\mathfrak{n}(g)}(\mathcal{H})))$ est dans la boule de centre $\mathfrak{a}(g)$ et rayon $1/2$. Pour conclure il suffit de remarquer que la boule de centre w et rayon $1/2$ relative à la métrique simpliciale est contenue dans l'étoile de w pour tout sommet $w \in \mathcal{L}^0$. $\square$

3 Théorie de l'obstruction

Nous élaborons ici une théorie de l'obstruction analogue à celle de [14,27,20] adaptée au cadre des feuilletages. C'est une théorie générale qui résout complètement le problème de l'extension d'un morphisme de feuilletages transversalement mesurable, ainsi que celui de la construction de sections transversalement mesurables d'un fibré sur M. Nous remarquons au passage qu'une "théorie de l'obstruction feuilletée continue" n'est pas envisageable. Par exemple considérons un plongement du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^3$ de sorte que le 0 est dans la composante connexe bornée du complémentaire de l'image. Par projection on obtient une application surjective dans la sphère $\mathbb{S}^2$ qui ne peut pas être étendue au tore plein $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Par contre, si on suppose le tore feuilleté par les horizontales, on remarque que la restriction de cette application à toute feuille $\mathbb{S}^1 \times \{*\}$ est extensible au disque correspondant $\mathbb{D}^2 \times \{*\}$. En d'autres mots nous avons un cocycle feuilleté continu qui est nul sans que l'application soit continûment extensible.

Soient $a, b : \mathbb{D}^n \to F$ deux applications continues qui coïncident sur le bord $\mathbb{S}^{n-1}$. On peut voir a et b comme des applications définies respectivement sur les hémisphères nord et sud de la sphère $\mathbb{S}^n$, qui sont en bijection avec le disque $\mathbb{D}^n$ par les projections canoniques de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On note $a * b : \mathbb{S}^n \to F$ le recollement de a et b. L'ensemble des paires (a, b) d'applications définies sur le disque et coïncidant sur le bord est un fermé K de $C(\mathbb{D}^n, F) \times C(\mathbb{D}^n, F)$ et le recollement est une opération continue sur K.

Plus généralement, supposons que les restrictions de a et b à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ ne sont pas identiques, mais seulement homotopes. Soit $h : [-1, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \to F$ telle que $h(1, x) = a(x)$ et $h(-1, x) = b(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. On peut recoller l'homotopie h avec a et b pour obtenir une application définie sur le bord de $[-1, 1] \times \mathbb{D}^n$. En identifiant celui-ci à la sphère $\mathbb{S}^n$ par la projection radiale on obtient une application $a *_h b : \mathbb{S}^n \to F$.

Comme cas particulier considérons deux applications $a, b : \mathbb{S}^n \to F$. On envoie $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ sur $(\mathbb{S}^n, o)$, où $o = (-1, 0, \ldots, 0)$, par une application quotient, et on choisit un chemin $c : [-1, 1] \to F$ un chemin qui relie le point $b(o)$ au point $a(o)$. En relevant a et b sur le disque $\mathbb{D}^n$ et le chemin c sur $[-1, \times 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ on obtient un triplet (a, h_c, b) comme ci-dessus. On note dans ce cas $a *_c b : \mathbb{S}^n \to F$ l'application correspondante.

Définition 3.1 Un espace topologique F est dit *n-simple* si la classe d'homotopie de l'application $a *_c b$ est indépendante du chemin c. Du coup elle ne dépend que des classes d'homotopie de a et b, ce qui définit une loi de composition dans l'ensemble $[\mathbb{S}^n, F]$ donnée par $[a] + [b] = [a * b]$. On vérifie que c'est une loi associative et commutative et qui possède un élément neutre représenté par les applications constantes. De plus, si θ est la symétrie de $\mathbb{S}^n$ par rapport à l'équateur, alors $[a] + [a \circ \theta] = 0$ pour tout a. Le groupe abélien sous-jacent est appelé le *n-groupe d'homotopie* de F et noté $\pi_n(F)$.

Considérons maintenant deux applications $\alpha, \beta : \partial\Delta_{n+1} \to F$ qui sont homotopes en restriction au $(n-1)$-squelette de Δ_{n+1}. On se fixe une homotopie h entre ces restrictions, pour chaque n-face orientée τ de Δ_{n+1} on construit l'élément $[\alpha_\tau *_h \beta_\tau] \in \pi_n(F)$, où α_τ et β_τ désignent les restrictions de α et β à la face τ. On obtient alors de façon très simple le résultat suivant:

Lemme 3.2 *Pour α, β et h comme ci dessus nous avons l'identité:*

$$\sum_\tau [\alpha_\tau *_h \beta_\tau] = [\alpha] - [\beta] \tag{1}$$

où τ parcourt les n-faces de Δ_{n+1} munies de l'orientation induite par celui-ci.

Désormais F désigne un espace séparable triangulable n-simple pour tout n. Pour tout espace métrique compact X on considère l'espace des applications continues $C(X, F)$ muni de la topologie compacte-ouverte. On note $\mathbb{D}^{n+1}$ le disque unité fermé dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^n$ la sphère unité. On identifie le disque $\mathbb{D}^n$ à la calotte sud de $\mathbb{S}^n$ via un homéomorphisme qu'on fixe une fois pour toutes. Nous avons alors la suite d'inclusions

$$\mathbb{D}^n \xrightarrow{i_-} \mathbb{S}^n \xrightarrow{i_+} \mathbb{D}^{n+1},$$

qui induit par restrictions une suite d'applications continues, donc boréliennes,

$$C(\mathbb{D}^{n+1}, F) \xrightarrow{i_+^*} C(\mathbb{S}^n, F) \xrightarrow{i_-^*} C(\mathbb{D}^n, F)\,.$$

Il est bien connu que l'application i_-^* est surjective, i.e. toute application continue sur la calotte sud s'étend à toute la sphère. Ce n'est pas le cas de i_+^*. Son image est le sous-espace fermé $C_0(\mathbb{S}^{n-1}, F)$ formé par les applications homotopes à zéro.

On considère l'application continue $[\cdot] : C(\mathbb{S}^n, F) \to \pi_n(F)$ qui assigne à toute g sa classe d'homotopie $[g]$. La suite d'applications continues

$$C(\mathbb{D}^{n+1}, F) \xrightarrow{i_+^*} C(\mathbb{S}^n, F) \xrightarrow{[\cdot]} \pi_n(F) \tag{2}$$

est exacte dans le sens où $\operatorname{im} i_+^* = \ker[\cdot]$, l'espace $\ker[\cdot]$ étant par définition $C_0(\mathbb{S}^{n-1}, F)$.

Lemme 3.3 *L'application i_+^* admet une section borélienne*

$$\mathfrak{s} : C_0(\mathbb{S}^n, F) \to C(\mathbb{D}^{n+1}, F).$$

Démonstration. On suppose F et $\mathbb{D}^{n+1}$ munis d'une triangulation. Celle de $\mathbb{D}^{n+1}$ induit une triangulation sur son bord $\mathbb{S}^n$. On notera $\Sigma(*, F)$ l'espace de fonctions qui sont simpliciales après une subdivision barycentrique de l'espace de départ. On commence par remarquer que la restriction de i_+^* à l'espace $\Sigma(\mathbb{D}^{n+1}, F)$ est à fibres dénombrables et son image est le borélien $\Sigma(\mathbb{S}^n, F) \cap C_0(\mathbb{S}^n, F)$. Elle admet par le théorème 2.1 une section borélienne:

$$\mathfrak{b} : \Sigma(\mathbb{S}^n, F) \cap C_0(\mathbb{S}^n, F) \to \Sigma(\mathbb{D}^{n+1}, F)$$

Soit $\alpha : C(\mathbb{S}^n, F) \to \Sigma(\mathbb{S}^n, F)$ l'application d'approximation simpliciale borélienne donnée par le théorème 2.5. L'application $\mathfrak{h} : C(\mathbb{S}^n, F) \to C([0, 1] \times \mathbb{S}^n)$ définie par

$$\mathfrak{h}(f)(t, x) = tf(x) + (1 - t)\mathfrak{a}(f)(x)$$

est borélienne et coïncide par construction avec $\mathfrak{a}$ sur la sphère $\{0\} \times \mathbb{S}^n$. Par recollement de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b} \circ \mathfrak{a}$ on obtient une application borélienne $\mathfrak{s}$ qui, compte tenu que $\{0\} \times \mathbb{D}^{n+1} \cup [0,1] \times \mathbb{S}^n$ est homéomorphe au disque $\mathbb{D}^{n+1}$, vérifie les conditions requises par l'énoncé. $\square$

La paire $(\mathbb{S}^n, \mathbb{D}^n)$ ayant le type l'homotopie de la sphère pointée $(\mathbb{S}^n, *)$, toute application continue $f \in C(\mathbb{D}^n, F)$ peut être étendue à toute la sphère $\mathbb{S}^n$ de sorte que la classe d'homotopie de l'extension soit un élément de $\pi_1(F)$ fixé à l'avance. Le résultat suivant montre que cette extension peut être choisie de façon borélienne:

Lemme 3.4 *Pour tout $\gamma \in \pi_n(F)$ il existe une application borélienne*

$$\mathfrak{s}_\gamma : C(\mathbb{D}^n, F) \to C(\mathbb{D}^n, F)$$

telle que, pour toute $g \in C(\mathbb{D}^n, F)$, on a:

(1) g et $\mathfrak{s}_\gamma(g)$ coïncident sur $\mathbb{S}^{n-1}$;
(2) $[g * \mathfrak{s}_\gamma(g)] = \gamma$.

Démonstration. Soit A la sphère bord du disque à coins $[-1,1] \times \mathbb{D}^n$, et soient A^-, A^+, et C les bases $\{-1\} \times \mathbb{D}^n$ et $\{1\} \times \mathbb{D}^n$ et la couronne $[-1,1] \times \mathbb{D}^n$ respectivement. Pour tout sous-ensemble $B \subset A$ on note $\mathfrak{r}_B$ l'application de restriction de A à B. On note $\Sigma^+_\gamma(A, F)$ le borélien de $C(A, F)$ formé par les applications qui sont simpliciales sur A^+ (modulo subdivision barycentrique) et dont la classe d'homotopie est $\gamma \in \pi_n(F)$. La restriction de $\mathfrak{r}_{C \cup A^-}$ au borélien $\Sigma^+_\gamma(A, F)$ est à fibres dénombrables et possède donc une section borélienne que l'on notera $\mathfrak{n}$. L'ensemble de définition de $\mathfrak{n}$ est le sous-espace $\Sigma^\partial(C \cup A^-, F)$ de $C(C \cup A^-, F)$ formé par les applications qui sont simpliciales en restriction à $\{1\} \times \mathbb{S}^{n-1}$. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{h}$ comme dans la preuve du lemme précédent. On définit une application borélienne $\mathfrak{e} : C(\mathbb{D}^n, F) \to \Sigma^\partial(C \cup A^-, F)$ par recollement de f et $\mathfrak{h}(f|_{\mathbb{S}^{n-1}})$, puis on considère la composition $\mathfrak{n} \circ \mathfrak{e} : C(\mathbb{D}^n, F) \to C(A, F)$. Enfin on définit $\mathfrak{s}_\gamma = \mathfrak{r}_{C \cup A^+} \circ \mathfrak{n} \circ \mathfrak{e}(f)$. Cette application vérifie par construction les conditions requises. $\square$

3.3 Triangulations de feuilletages

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété compacte feuilletée. Nous introduisons ici une notion de triangulation de feuilletages, similaire à celle de [19]. Notre définition est néanmoins bien plus souple, en particulier une triangulation au sens de [19] définit une triangulation selon notre définition.

Piles. On considère un espace métrique compact connexe Ω et un espace borélien standard T. Une *pile* de $(X, \mathcal{F})$ est donnée par un borélien $\Pi \subset X$ et un isomorphisme borélien $\pi : \Omega \times T \to \Pi$ tel que, pour tout $t \in T$, la restriction $\pi_t : \Omega \to M$ de π à $\Omega \times \{t\}$ est un plongement de Ω dans une feuille de $\mathcal{F}$. Les éléments Ω, T et π seront appelés respectivement la *base*, la *verticale* et le *paramétrage* de la pile. Les *plaques* de (Π, π) sont les ensembles $\Pi_t = \pi(\Omega \times \{t\})$.

Triangulations. Une *triangulation borélienne (de classe C^r)* de $(M, \mathcal{F})$ est une famille $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_L | L \in \mathcal{F}\}$ de triangulations de classe C^r des feuilles de $\mathcal{F}$ telle que pour chaque entier $0 \leq p \leq \dim \mathcal{F}$ il existe une quantité dénombrable de piles (de classe BC^r):

$$\pi_i^p : \Delta_p \times T_i^p \to \Sigma_i^p \quad , \quad i \in I_p$$

de base Δ_p le p-simplexe standard et vérifiant les propriétés suivantes:

(1) les plaques de π_i^p sont des p-simplexes de $\mathcal{K}$.
(2) pour chaque p-simplexe σ existe un seul $i \in I_p$ et un $t \in T_i$ tel que $\sigma = \pi_i^p(\cdot, t)(\Delta_p)$. On note alors π_σ l'homéomorphisme $\pi_i^p(\cdot, t) : \Delta_p \to \sigma$.

Par abus de langage on notera aussi $\mathcal{K}$ l'ensemble des simplexes de la triangulation. C'est un complexe simplicial non connexe ni séparable mais à composantes connexes séparables. On note $\mathcal{K}^{(p)}$ l'ensemble des simplexes de dimension p de $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^p$ l'ensemble des simplexes de dimension $\leq p$ et $\mathcal{K}^{[p]}$ l'ensemble des p-simplexes orientés, i.e. des paires formées par un p-simplexe plus une orientation de celui-ci. Pour $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ on note $|\mathcal{H}| \subset M$ la réunion des simplexes de $\mathcal{H}$. On a bien sûr $|\mathcal{K}| = M$.

Avec ces conditions l'ensemble $\mathcal{K}$ peut être identifié à l'espace borélien standard $\cup_{p,i} T_i^p$, les ensembles $\mathcal{K}^p$ et $\mathcal{K}^{(p)}$ étant des boréliens de $\mathcal{K}$. L'ensemble des p-simplexes orientés $\mathcal{K}^{[p]}$ est muni également d'une structure borélienne standard qui fibre sur $\mathcal{K}^p$ avec une fibre à deux points. On peut voir aussi $\mathcal{K}$ comme étant le borélien de M formé par les barycentres de ses simplexes.

Cohomologie simpliciale. Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage muni d'une triangulation borélienne $\mathcal{K}$. Soit Γ un groupe abélien borélien, i.e. un groupe abélien muni d'une structure borélienne standard préservée par la somme et l'inversion. Une *p-cochaîne* de $\mathcal{K}$ est une application borélienne $c : \mathcal{K}^{[p]} \to \Gamma$ telle que $c(-\tau) = -c(\tau)$, où $-\tau$ est le simplexe τ muni de l'orientation opposée. Le *cobord* de c est la $(p+1)$-cochaîne de $\mathcal{K}$ définie par

$$dc(\sigma) = \sum_{\tau \subset \sigma} c(\tau) \quad , \quad \sigma \in \mathcal{K}^{[p+1]}$$

où τ parcourt l'ensemble des p-simplexes de $\mathcal{K}$ contenus dans σ et munis de l'orientation induite par celui-ci. On vérifie de la fa con usuelle que $d^2c = 0$ pour toute cochaîne c.

On note $C^p(\mathcal{K}, \Gamma)$ le groupe abélien des p-cochaînes de $\mathcal{K}$ et $C^*(\mathcal{K}, \Gamma)$ la somme directe de ces groupes. Puisque la somme dans Γ est une opération borélienne, le cobord d'une cochaîne est borélien. On a donc un opérateur nilpotent $d : C^*(\mathcal{K}, \Gamma) \to C^*(\mathcal{K}, \Gamma)$ dont la cohomologie est notée $H^*(\mathcal{K}, \Gamma)$ et appelée *cohomologie simpliciale de* $\mathcal{K}$ *à valeurs dans* Γ. On appelle comme d'habitude *p-cocycles* et *p-cobords* les p-cochaînes de $\mathcal{K}$ appartenant respectivement au noyau et à l'image de d.

3.4 Le théorème central

Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage muni d'une triangulation mesurable $\mathcal{K}$. On se fixe un entier p compris entre 0 et $\dim \mathcal{F}$ et on considère une application $g : |\mathcal{K}^p| \to F$ de classe BC^0.

Définition 3.5 *Soit $r > p$. On dira que g est* r-extensible *s'il existe une application $\bar{g} : |\mathcal{K}^r| \to \mathcal{F}$ de classe BC^0 qui coïncide avec g en restriction à $|\mathcal{K}^p|$.*

On va étudier dans cette section le problème de l'extensibilité d'une telle application g. Pour cela il est utile de découper le p-squelette en piles de p-simplexes, de sorte que nous pouvons voir g indifféremment comme une application $g^\star : \mathcal{K}^{p+1} \to C(\mathbb{S}^p, F)$ ou comme une application $g_\star : \mathcal{K}^p \to C(\mathbb{D}^p, F)$, toutes les deux boréliennes. Ces deux points de vue sont équivalents en vertu de la proposition 2.3.

Pour chaque $(p+1)$-simplexe orienté $\sigma \in \mathcal{K}^{[p+1]}$ on considère:

$$c(g)(\sigma) = [g^*(\sigma)] \in \pi_p(F).$$

On définit ainsi $(p+1)$-cochaîne $c(g) \in C^{p+1}(\mathcal{K}; \pi_p(F))$ qui s'avère être un cocycle (cf. [27]) que l'on appelle communément *cocycle d'obstruction.* Le théorème suivant constitue le cœur de la théorie de l'obstruction feuilletée:

Théorème 3.6 *Les trois propriétés suivantes sont vérifiées:*

(1) Le cocycle $c(g) = 0$ si et seulement si g est $(n+1)$-extensible.
(2) Soient $g_0, g_1 : |\mathcal{K}^p| \to F$ deux applications de classe BC^0 qui sont BC^0-homotopes en restriction à $|\mathcal{K}^{p-1}|$. Pour une telle homotopie h il existe une p-cochaîne $\omega(g_0, h, g_1) \in C^p(\mathcal{K}, \pi_p(F))$ telle que:

$$d\omega(g_0, h, g_1) = c(g_0) - c(g_1)$$

En particulier $[c(g_0)] = [c(g_1)] \in H^{p+1}(\mathcal{K}, \pi_p(F))$. *On appelle* $\omega(g_0, g_1)$ *la* cochaîne différence.

(3) *Soit* $g_0 : |\mathcal{K}^p| \to F$ *une application de classe* BC^0. *Pour toute p-cochaîne* $\omega \in C^p(\mathcal{K}; \pi_p(F))$ *il existe une application* $g_1 : |\mathcal{K}^p| \to F$ *de classe* BC^0 *qui coïncide avec* g_0 *sur* $|\mathcal{K}^{p-1}|$ *et telle que:*

$$\omega = \omega(g_0, g_1).$$

Démonstration. Les trois conditions sont des corollaires plus ou moins directs des lemmes 3.3, 3.2 et 3.4. On reprend donc les notations introduites au §3.2.

Preuve de 1: Il est clair que si g est $(p+1)$-extensible alors $g^\star$ est à valeurs dans $C_0(S^p, F)$ et $c(g) = 0$. Réciproquement si $g^\star$ est à valeurs dans $C_0(S^p, F)$, on définit une extension $\tilde{g}$ de g en posant $\tilde{g}_\star = \mathfrak{s} \circ g^\star$.

Preuve de 2: Soit $h^\star : \mathcal{K}^p \to C(\mathbb{S}^{p-1} \times [0,1], F)$ l'application borélienne associée à l'homotopie h. La cochaîne $\omega(g_0, h, g_1) = [g_0^\star *_{h^\star} g_1^\star]$ vérifie la condition requise d'après le lemme 3.2.

Preuve de 3: Il suffit de poser $g_1^\star(\sigma) = \mathfrak{s}_\alpha \circ g_0^\star(\sigma)$ si $\omega(\sigma) = \alpha$. L'application $g_1^\star$ est bien borélienne puisque $\pi_1(F)$ est dénombrable. $\square$

Considérons un deuxième feuilletage $(N, \mathcal{G})$ muni d'une triangulation borélienne $\mathcal{L}$, et soit $\phi : M \to N$ une application de classe BC^0 simpliciale le long de chaque feuille. Elle détermine de la façon usuelle un homomorphisme de cochaînes $\phi^\sharp : C^*(\mathcal{L}, \Gamma) \to C^*(\mathcal{K}, \Gamma)$ pour n'importe quel groupe abélien borélien Γ. La preuve du résultat suivant est complètement standard (voir par exemple [27,20]):

Théorème 3.7 *Soit* $g : |\mathcal{L}^p| \to F$ *une application de classe* BC^0. *Alors* $g \circ \phi : |\mathcal{K}^p| \to F$ *est de classe* BC^0 *et on a*

$$c(g \circ \phi) = \phi^\sharp(c(g)).$$

4 Classes caractéristiques feuilletées

Les développements de la section précédente peuvent être généralisés au cas des fibrés localement triviaux sur M ayant une fibre simpliciale. Nous suivrons dans la mesure du possible la démarche décrite par Steenrod [27] suivant les travaux de Eilenberg [14]. On se fixe ici un feuilletage $(M, \mathcal{F})$ muni d'une triangulation $\mathcal{K}$, et on considère un fibré topologique localement trivial $\xi = (E, p, M, F)$ dont la fibre F est un espace connexe localement compact triangulable et simple.

Avant de continuer on fixe quelques points de vocabulaire:

(1) Une *p-section* de ξ est une section de ξ définie sur $|\mathcal{K}^p|$. On supposera que toutes les sections sont de classe BC^0. On dira qu'une telle section est *r-extensible* ($r > p$) s'il existe une r-section de classe BC^0 de ξ qui coïncide avec g sur le p-squelette.
(2) Deux p-sections g_0 et g_1 de ξ de classe BC^0 sont *homotopes* s'il existe une application $h : |\mathcal{K}^p| \times [0,1] \to E$ de classe BC^0 telle que:
   (a) $h(\cdot, t)$ est une p-section (a fortiori de classe BC^0 de ξ pour tout $t \in [0,1]$.
   (b) $h(\cdot, 0) = g_0$ et $h(\cdot, 1) = g_1$.

4.1 Cohomologie simpliciale à valeurs dans un fibré de coefficients.

Un fibré de coefficients sur M est un fibré principal $\mathbf{\Gamma}$ dont la fibre est un groupe discret dénombrable Γ. Pour tout $x \in M$ on notera Γ_x la fibre de $\mathbf{\Gamma}$ au dessus de x; si x est le barycentre d'un simplexe σ de $\mathcal{K}$ on posera $\Gamma_x = \Gamma_\sigma$.

Soit ξ un fibré dont la fibre est un complexe simplicial simple F. On note $\mathbf{\Pi}_p(\xi)$ ou tout simplement $\mathbf{\Pi}_p$ le fibré de coefficients associé à ξ ayant pour fibre le groupe $\pi_p(F)$. Il est défini en remplaçant un cocycle de ξ, qui est à valeurs dans $Aut(F)$, par le cocycle à valeurs dans $Aut(\pi_p(F))$ obtenu par passage aux classes d'homotopie.

Une *p-cochaîne de $\mathcal{K}$ à valeurs dans $\mathbf{\Gamma}$* est une application borélienne

$$c : \mathcal{K}^{[p]} \to \mathbf{\Gamma}$$

telle que $c(\sigma) \in \Gamma_\sigma$ et $c(-\sigma) = -c(\sigma)$. L'espace des p-cochaînes est un groupe abélien dont la structure est donnée par celle de Γ et que l'on notera $C^p(\mathcal{K}; \mathbf{\Gamma})$.

La trivialité locale permet une identification entre les groupes Γ_σ et Γ_τ pour toute face τ de σ. On peut ainsi définir le *cobord* d'une p-cochaîne c de $\mathcal{K}$ par la formule

$$dc(\sigma) = \sum_{\tau \subset \sigma} c(\tau) \quad , \quad \sigma \in \mathcal{K}^{[p+1]} \tag{3}$$

où τ parcourt les p-faces de σ munies de l'orientation induite par celle-ci. Puisque Γ est discret et σ est simplement connexe, l'identification entre Γ_σ et Γ_τ est indépendante de la trivialisation choisie. Le cobord est donc un morphisme de groupes bien défini $d : C^p(\mathcal{K}, \mathbf{\Gamma}) \to C^{p+1}(\mathcal{K}, \mathbf{\Gamma})$. On vérifie aussi de la façon usuelle que $d^2 = 0$; la cohomologie du morphisme d est appelée *cohomologie simpliciale de $\mathcal{K}$ à valeurs dans $\mathbf{\Gamma}$* et notée $H^*(\mathcal{K}, \mathbf{\Gamma})$.

On se fixe un fibré localement trivial $\xi = (E, p, M, F)$ au dessus de M comme ci-dessus et on considère $g : |\mathcal{K}^p| \to E$ une p-section de classe BC^0 de ξ. En se fixant une trivialisation de ξ au dessus de chaque $(p+1)$-simplexe $\sigma \in \mathcal{K}^{(p+1)}$ on identifie la fibre F_x avec F_σ pour tout $x \in \sigma$ où F_σ est la fibre de ξ au dessus du barycentre de σ, on peut voir la restriction de g à $\partial\sigma$ comme une application $g^\star(\sigma) \in C(\mathbb{S}^p, F_\sigma)$. En prenant la classe d'homotopie de $g^\star(\sigma)$ on définit une $(p+1)$-cochaîne de $\mathcal{K}$ à valeurs dans le p-fibré de coefficients $\mathbf{\Pi}_p$ de ξ:

$$c(g) : \sigma \in \mathcal{K}^{[p+1]} \to [g^\star(\sigma)] \in \Pi_p.$$

On remarque alors que puisque F est simple, la classe d'homotopie de $g^\star(\sigma)$ est indépendante de la trivialisation choisie. Nous avons dans ce cadre plus général un équivalent du théorème 3.6, avec une preuve tout à fait analogue à celle développée au § 3.4:

Théorème 4.1 *Les quatre propriétés suivantes sont vérifiées:*

(1) *Le cocycle $c(g) = 0$ si et seulement si la section g est $(n+1)$-extensible.*
(2) *Soient g_0 et g_1 sont deux p-sections de classe BC^0 de ξ qui sont homotopes en restriction à $|\mathcal{K}^{p-1}|$. Pour une telle homotopie h il existe une p-cochaîne $\omega(g_0, h, g_1) \in C^p(\mathcal{K}; \mathbf{\Pi}_p)$ telle que:*

$$d\omega(g_0, h, g_1) = c(g_0) - c(g_1)$$

En particulier $[c(g_0)] = [c(g_1)] \in H^{p+1}(\mathcal{K}; \mathbf{\Pi}_p)$.
(3) *Soit g_0 une p-section de classe BC^0 de ξ. Pour toute p-cochaîne borélienne $\omega \in C^p(\mathcal{K}; \mathbf{\Pi}_p)$ existe une p-section de classe BC^0 g_1 de ξ de classe BC^0 qui coïncide avec g_0 sur $|\mathcal{K}^{p-1}|$ et telle que:*

$$\omega = \omega(g_0, g_1).$$

Soit $(N, \mathcal{G})$ un feuilletage muni d'une triangulation borélienne $\mathcal{L}$ et soit $\xi' = (E', p', N, F)$ un deuxième fibré topologique localement trivial de fibre F. Un *morphisme borélien* entre ξ et ξ' est une application $\Phi : E \to E'$ de classe BC^0 qui envoie homéomorphiquement fibre sur fibre. Elle induit donc une application $\phi : M \to N$ entre les bases définie par $p' \circ \Phi = \phi \circ p$. Le morphisme Φ est dit *simplicial* si l'application ϕ est simpliciale. Nous avons:

Théorème 4.2 *Soit $\Phi : \xi \to \xi'$ un morphisme simplicial et soit $g' : |\mathcal{L}^p| \to E'$ une p-section borélienne de ξ'. Alors il existe une et une seule p-section borélienne g de ξ telle que $\Phi \circ g = g' \circ \phi$ et on a:*

$$\phi^\sharp(c(g')) = c(g).$$

Le théorème 4.1 permet la construction topologique des classes caractéristiques feuilletées d'un fibré, comme dans [27]. On notera désormais $\mathbf{p}$ le plus petit entier pour lequel le groupe $\pi_{\mathbf{p}}(F)$ est non trivial.

Lemme 4.3 *Soit ξ un fibré localement trivial de fibre simple F au dessus de M. Les deux propriétés suivantes sont vérifiées:*

(1) ξ possède une $(\mathbf{p}-1)$-section de classe BC^0.
(2) Deux $(\mathbf{p}-1)$-sections de classe BC^0 de ξ sont homotopes.

Démonstration. L'existence de $(\mathbf{p}-1)$-sections de classe BC^0 découle de l'existence de 0-sections, puis d'une récurrence sur p en utilisant le théorème 4.1. Mais l'existence de 0-sections de classe BC^0 est pratiquement triviale car, $|\mathcal{K}^0|$ étant une transversale borélienne, la continuité le long des feuilles est automatique, et il est très facile construire une section borélienne d'un fibré localement trivial au dessus d'un espace à base dénombrable, en l'occurrence M: on prend une suite U_i d'ouverts trivialisants de ξ et on définit des sections boréliennes sur U_0, $U_1 - U_0$, $U_2 - (U_1 \cup U_0)$ et ainsi de suite, qui se recollent entre elles en une section borélienne de ξ, qu'on restreint ensuite à $|\mathcal{K}^0|$.

Pour montrer que deux $(\mathbf{p}-1)$-sections g_0 et g_1 de ξ sont homotopes, on considère la variété à bord $M \times [0,1]$ munie du feuilletage $\mathcal{F} \times [0,1]$ dont les feuilles sont le produit de celles de $\mathcal{F}$ par l'intervalle $[0,1]$. La triangulation $\mathcal{K}$ définit des triangulations des feuilletages $(M,\mathcal{F}) \times 0$ et $(M,\mathcal{F}) \times 1$ qui s'étendent de manière évidente à une triangulation $\mathcal{K}'$ du feuilletage $(M,\mathcal{F}) \times [0,1]$. On remarque alors que l'homotopie h cherchée n'est autre chose qu'une p-section du fibré $\xi \times [0,1]$, pull-back de ξ par la projection $M \times [0,1] \to M$. Plus précisément, c'est la restriction d'une p-section de $\xi \times [0,1]$ au sous-complexe $|\mathcal{K}^{\mathbf{p}-1}| \times [0,1]$ de $|\mathcal{K}'|$ qui coïncide avec g_0 et g_1 sur les bases $|\mathcal{K}^{\mathbf{p}-1}| \times 0$ et $|\mathcal{K}^{\mathbf{p}-1}| \times 1$. Elle existe d'après la propriété 1 démontrée ci-dessus. □

Soient g_0 et g_1 deux $(\mathbf{p}-1)$-sections de classe BC^0 de ξ. On considère une homotopie h entre g_0 et g_1 comme celle donnée par le lemme précédent. Soient et $\hat{g}_0$ et $\hat{g}_1$ deux $\mathbf{p}$-extensions de g_0 et g_1 respectivement. Il existe en vertu du théorème 4.1(2) une $\mathbf{p}$-cochaîne différence $\omega(g_0, h, g_1) \in C^{\mathbf{p}}(\mathcal{K}, \mathbf{\Pi_p})$ telle que $d\omega(g_0, h, g_1) = c(g_0) - c(g_1)$. En particulier la classe de cohomologie:

$$\mathfrak{c}(\xi, \mathcal{K}) = [c(\hat{g}_0)] = [c(\hat{g}_1)]$$

ne dépend ni des $(\mathbf{p}-1)$-sections ni des $\mathbf{p}$-extensions choisies. C'est une classe canoniquement associée au fibré ξ et à la triangulation $\mathcal{K}$. Cette classe est appelée *la classe caractéristique simpliciale* de ξ.

Nous avons le corollaire suivant du théorème 4.1:

Théorème 4.4 *Soit ξ un fibré localement trivial de fibre simple F et $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage de dimension n. Si $\pi_p(F) = 0$ pour tout $p \leq n-2$, alors la classe $\mathfrak{c}(\xi,\mathcal{K}) = 0$ si et seulement si le fibré ξ possède une section de classe BC^0.*

5 Preuve des théorèmes A, B, C, D et E

Nous appliquons les résultats démontrés dans les sections précédents à la preuve des théorèmes annoncés dans l'introduction.

5.1 Mesures transverses invariantes

Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage sur une variété compacte. Une *transversale borélienne* de $(M,\mathcal{F})$ est un borélien de M qui rencontre toute feuille le long d'un fermé discret de cette feuille. Deux transversales T et S sont *isomorphes* s'il existe une transformation bijective bi-borélienne $\gamma : T \to S$ telle que $\gamma(x)$ est dans la même feuille que x pour tout $x \in T$.

Une *mesure transverse* est une application σ-additive μ qui assigne à chaque transversale borélienne T de $(M,\mathcal{F})$ un nombre $\mu(T) \in [0,\infty]$. Une telle mesure est *invariante* si $\mu(T) = \mu(S)$ pour toute paire de transversales boréliennes isomorphes T et S. Elle sera dite *finie* si $\mu(T) < \infty$ pour toute transversale borélienne compacte T. On appellera dans la suite *feuilletage mesuré* tout feuilletage muni d'une mesure transverse invariante finie μ.

Le lemme suivant clarifie la signification de l'invariance d'une mesure transverse. Sa preuve, complètement élémentaire, est laissée au lecteur.

Lemme 5.1 *Soit T et S deux transversales mesurables de $(M,\mathcal{F})$ et $\alpha : T \to S$ une transformation mesurable telle que $f(x) \in L_x$ pour tout $x \in T$. Soit μ une mesure transverse invariante sur $(M,\mathcal{F})$. Alors pour toute fonction $f \in L^1(T,\mu)$ on a:*

$$\int_T f(x)d\mu(x) = \int_S \left(\sum_{x\in\alpha^{-1}(y)} f(x) \right) d\mu(y).$$

Un ensemble $A \subset M$ est dit *$\mathcal{F}$-saturé* ou tout simplement *saturé* s'il est réunion de feuilles de $\mathcal{F}$. Un saturé A est *μ-négligeable* si toute transversale borélienne $T \subset A$ est de mesure nulle.

Définition 5.2 Un objet définit sur $(M, \mathcal{F}, \mu)$ sera dit *de classe* MC^0 (pour mesurable et continu) s'il existe un borélien saturé μ-négligeable $A \subset M$ tel que l'objet est de classe BC^0 (i.e. globalement borélien et continu le long des feuilles) en restriction à $M - A$.

On termine ce paragraphe en rappelant la notion de mesure ergodique.

Définition 5.3 Une mesure transverse invariante μ sur $(M, \mathcal{F})$ est dite *ergodique* si pour tout borélien saturé A, soit lui soit son complémentaire est μ-négligeable. Un feuilletage muni d'une mesure ergodique est appelé un feuilletage mesuré ergodique.

5.2 Triangulations et champs μ-finis

Soit $(M, \mathcal{F}, \mu)$ un feuilletage mesuré. Une triangulation $\mathcal{K}$ de $(M, \mathcal{F})$ est dite *μ-finie* si $\mu(\mathcal{K}^{(p)}) < \infty$ pour tout p. On peut trouver une preuve du résultat suivant dans [19]:

Proposition 5.4 *Tout feuilletage mesuré $(M, \mathcal{F}, \mu)$ de classe C^r possède une triangulation μ-finie de classe C^r.*

On appellera *champ tangent* toute section $\mathbf{X}$ du fibré tangent $T\mathcal{F}$ continue le long des feuilles. On considérera deux types de champs tangents:

(i) Ceux *de classe* BC^0 qui sont globalement boréliens entant qu'applications de M dans $T\mathcal{F}$;
(ii) Ceux *de classe* MC^0 qui sont boréliens quitte à enlever un saturé μ-négligeable de M.

On notera $O_{\mathbf{X}}$ l'ensemble des zéros de $\mathbf{X}$. Un champ tangent $\mathbf{X}$ est dit *transverse* ou *à zéros isolés* si la trace de $O_{\mathbf{X}}$ sur μ-presque toute feuille est un fermé discret de la feuille. On remarquera que le caractère fermé découle automatiquement de la continuité de $\mathbf{x}$ le long de la feuille. Si $\mathbf{X}$ est de classe BC^0 alors $O_{\mathbf{X}}$ est une transversale borélienne, tandis qu'en classe MC^0 l'ensemble $O_{\mathbf{X}}$ est seulement mesurable, i.e. borélien modulo un sous-ensemble de mesure nulle. L'indice local $ind_{\mathbf{X}}(x)$ est en tout cas bien défini pour μ-presque tout $x \in O_{\mathbf{X}}$ et détermine une fonction mesurable sur $O_{\mathbf{X}}$.

Définition 5.5 Un champ tangent transverse $\mathbf{x}$ est dit *μ-fini* si la fonction indice $ind_{\mathbf{X}} \in L^1(O_{\mathbf{X}}, \mu)$. Dans ce cas l'intégrale $\int_{O_{\mathbf{X}}} ind_{\mathbf{X}}\, d\mu$ est un nombre réel que nous appellerons *indice moyen* du champ par rapport à μ.

5.3 Un peu d'homologie

On se fixe une triangulation μ-finie $\mathcal{K}$ sur le feuilletage mesuré $(M, \mathcal{F}, \mu)$, ainsi qu'un isomorphisme borélien $\mathcal{K} \simeq [0,1]$ dont l'utilité est de munir l'espace des simplexes d'un ordre borélien. Cet ordre permet de définir des applications bord boréliennes $\partial_i : \mathcal{K}^{[p+1]} \to \mathcal{K}^{[p]}$ telles que $\partial_0(\sigma), \partial_1(\sigma), \ldots, \partial_{p+1}(\sigma)$ sont les p-faces de σ écrites en ordre croissant et munies des orientations induites.

On veut définir le complexe $(C_*(\mathcal{K}, \mathbb{R}), \partial)$ des *chaînes boréliennes réeles* de $\mathcal{K}$. Pour cela prenons un $(p-1)$-simplexe orienté $\tau \in \mathcal{K}^{[p-1]}$. Puisque les feuilles sont localement compactes, l'étoile de τ est finie, i.e. il existe un nombre fini de p-simplexes orientés σ tels que $\tau = \partial_i \sigma$. Alors pour toute cochaîne $z \in C^{p-1}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ la somme finie

$$\tilde{z}(\tau) = \sum_{\tau = \partial_i \sigma} z(\sigma).$$

définit un élément $\tilde{z} \in C^{p-1}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$. On définit le complexe des chaînes en posant $C_p(\mathcal{K}, \mathbb{R}) = C^p(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $\partial z = \tilde{z} \in C_{p-1}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ pour tout $z \in C_p(\mathcal{K}, \mathbb{R})$. L'homologie de ce complexe est appelée l'*homologie borélienne réelle* de $\mathcal{K}$ et notée $H_*(\mathcal{K}, \mathbb{R})$.

5.4 L'indice de Kronecker

Définition 5.6 Soient $c \in C^p(\mathcal{K}; \mathbb{R})$ et $z \in C_p(\mathcal{K}; \mathbb{R})$ une p-cochaîne et une p-chaîne. On définit l'*indice de Kronecker global* ou *moyen* de z et c par:

$$\langle c, z \rangle_\mu = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{K}^{[p]}} c(\sigma) \cdot z(\sigma) \; d\mu(\sigma)$$

On introduit le facteur $\frac{1}{2}$ pour compenser le fait que l'on intègre deux fois la valeur $c(\sigma) \cdot z(\sigma) = c(-\sigma) \cdot z(-\sigma)$. Remarquons que l'intégrale ci-dessus n'est pas toujours définie ni finie. Une paire cochaîne-chaîne (c, z) sera dite *μ-finie* si $\int |c \cdot z| d\mu < \infty$. Dans ce cas $\langle c, z \rangle_\mu$ est un nombre réel bien défini.

Proposition 5.7 *Soit $c \in C^{p-1}(\mathcal{K}; \mathbb{R})$ et $z \in C_p(\mathcal{K}; \mathbb{R})$ des (co)chaînes de $\mathcal{K}$. Si les paires (dc, z) et $(c, \partial z)$ sont μ-finies alors:*

$$\langle dc, z \rangle_\mu = \langle c, \partial z \rangle_\mu.$$

Démonstration. Soit $\partial_i : \mathcal{K}^{[p]} \to \mathcal{K}^{[p-1]}$ les applications face. Rappelons qu'elles sont mesurables. Nous avons:

$$\langle dc, z\rangle_\mu = \int_{\mathcal{K}^{[p]}} dc(\sigma)\cdot z(\sigma)\, d\mu(\sigma) = \sum_i \int_{\mathcal{K}^{[p]}} c(\partial_i\sigma)\cdot z(\sigma)\, d\mu(\sigma)$$

$$\langle c, \partial z\rangle_\mu = \int_{\mathcal{K}^{[p-1]}} c(\tau)\cdot \partial z(\tau)\, d\mu(\tau) = \sum_i \int_{\mathcal{K}^{[p-1]}} \sum_{\partial_i\sigma=\tau} c(\tau)\cdot z(\sigma)\, d\mu(\tau)$$

En appliquant le lemme 5.1 à la fonction $f : \mathcal{K}^{[p]} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\sigma) = c(\partial_i\sigma)\cdot z(\sigma)$ et à la transformation $\alpha = \partial_i$, on obtient l'égalité entre les termes respectifs des sommes à droite. Ceci démontre la proposition. $\square$

5.5 Orientation et cycle fondamental

On note $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ le revêtement des orientations de $\mathcal{F}$; c'est un revêtement à deux feuillets de M feuilleté par les revêtements des orientations des feuilles. Une *orientation borélienne* de $\mathcal{F}$ est une section $\mathfrak{o}$ de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ de classe BC^0. Le feuilletage est boréliennement orientable s'il possède une orientation borélienne. Il est clair qu'une orientation au sens classique du fibré vectoriel $T\mathcal{F}$ définit une orientation borélienne de $\mathcal{F}$, autrement dit un feuilletage orientable est boréliennement orientable.

Une orientation borélienne $\mathfrak{o}$ de $(M,\mathcal{F})$ définit une orientation sur chaque feuille, et en particulier sur les n-simplexes d'une triangulation $\mathcal{K}$. On note $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathfrak{o}}$ la n-chaîne borélienne qui vaut 1 sur les n-simplexes de $\mathcal{K}$ munis de l'orientation $\mathfrak{o}$. Il est bien connu qu'il s'agit d'un cycle que nous appellerons le *cycle fondamental* de $(M,\mathcal{F})$ (relatif à l'orientation $\mathfrak{o}$).

5.6 Preuve du théorème A

Étape I

On définit la caractéristique d'Euler d'une une triangulation μ-finie $\mathcal{K}$ de $(M,\mathcal{F})$ par:

$$\chi(\mathcal{K},\mu) = \sum_i (-1)^i \mu(\mathcal{K}^{(i)}) = \int_{\mathcal{K}} (-1)^{\dim\sigma} d\mu(\sigma).$$

Dans cette première étape nous prouvons le lemme suivant:

Lemme 5.8 *Si $\mathcal{K}$ est une triangulation de classe C^2 de $(M,\mathcal{F},\mu)$ alors il existe un champ tangent $\mathbf{Z}$ de classe BC^0, μ-fini et à zéros isolés sur $(M,\mathcal{F},\mu)$*

tel que
$$\chi(\mathcal{K},\mu) = \int_{O_{\mathbf{Z}}} ind_{\mathbf{Z}}(x)\, d\mu(x).$$

Démonstration. Soient $\mathcal{K}' = sd(\mathcal{K})$ et $\mathcal{K}'' = sd^2(\mathcal{K})$ les première et deuxième subdivisions barycentriques de $\mathcal{K}$. Tout sommet $v \in \mathcal{K}''^0$ est dans l'intérieur d'un seul simplexe de $\mathcal{K}$. On note $\eta(v)$ le barycentre de ce simplexe. Nous avons ainsi une application mesurable $\eta : \mathcal{K}''^0 \to \mathcal{K}'^0$ qui engendre par linéarité une application simpliciale $\eta : |\mathcal{K}''| \to |\mathcal{K}'|$. Pour tout $x \in |\mathcal{K}''|$ le point $\eta(x)$ est dans le même simplexe que x de sorte que le chemin linéaire orienté c_x d'origine x et extrémité $\eta(x)$ est bien défini. Ce chemin est de classe C^1 car la triangulation est de classe C^2. On note $\mathbf{Z}(x)$ le vecteur tangent à c_x en x. Ceci définit un champ de vecteurs tangents aux feuilles dont les singularités correspondent aux barycentres des simplexes de $\mathcal{K}$, et on peut vérifier facilement l'identité suivante:
$$ind_{\mathbf{Z}}(\sigma) = (-1)^{\dim \sigma} \tag{4}$$
où $ind_{\mathbf{Z}}(\sigma)$ désigne l'indice de $\mathbf{Z}$ au barycentre de σ. En effet $\mathbf{Z}$ pointe vers le barycentre de σ en tout point de l'intérieur de σ. Par conséquent $-\mathbf{Z}$ pointe vers le barycentre de σ aux points intérieurs des simplexes de $\mathcal{K}''$ transverses à σ. Le champ $\mathbf{Z}$ a donc pour variété stable au point singulier $\hat{\sigma}$ le simplexe σ. Mais il est bien connu que l'indice d'une telle singularité est égale à la parité de la dimension de sa variété stable. Ceci montre l'identité (4). On complète la preuve du lemme en intégrant l'identité (4) par rapport à μ. $\square$

Étape II

Soit maintenant $\mathbf{X}$ un champ tangent μ-fini et à zéros isolés. Quitte à déformer légèrement la triangulation $\mathcal{K}$ on peut supposer que $O_{\mathbf{X}}$ ne rencontre pas le $(n-1)$-squelette $|\mathcal{K}^{n-1}|$. Ce champ détermine donc par restriction une $(n-1)$-section de $T^1\mathcal{F}$ que nous notons $g_{\mathbf{X}}$. Pour tout n-simplexe $\sigma \in \mathcal{K}^{[n]}$ muni de l'orientation induite par celle du feuilletage on a par définition:

$$c(g)(\sigma) = \sum_{x \in O_{\mathbf{X}} \cap \sigma} ind_{\mathbf{X}}(x).$$

En intégrant sur $\mathcal{K}^{[n]}$ l'identité ci-dessus on obtient:

$$\langle c(g_{\mathbf{X}}), \mathbf{1}\rangle_\mu = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{K}^{[n]}} c(g_{\mathbf{X}})(\sigma)\cdot \mathbf{1}(\sigma)\, d\mu(\sigma) = \int_{O_{\mathbf{X}}} ind_{\mathbf{X}}(x)\, d\mu(x)$$

Considérons maintenant le champ $\mathbf{Z}$ de l'énoncé du lemme 5.8. Les cocycles d'obstruction $c(g_{\mathbf{X}})$ et $c(g_{\mathbf{Z}})$ sont cohomologues d'après le théorème 4.1. En appliquant la proposition 5.7 on obtient:

$$\chi(\mathcal{K},\mu) = \langle c(g_{\mathbf{Z}}), \mathbf{1}\rangle_\mu = \langle c(g_{\mathbf{X}}), \mathbf{1}\rangle_\mu = \int_{O_{\mathbf{X}}} ind_{\mathbf{X}}(x)\, d\mu(x).$$

Étape III

On conclut la preuve du théorème par le lemme suivant:

Lemme 5.9 *Soit $\mathcal{K}$ une triangulation μ-finie de $(M, \mathcal{F})$. Alors:*

$$\chi(M, \mathcal{F}, \mu) = \chi(\mathcal{K}, \mu).$$

Démonstration. La caractéristique d'Euler de $(M, \mathcal{F}, \mu)$ est par définition l'accouplement de la classe d'Euler $e(T\mathcal{F}) \in H^n(M, \mathbb{Z})$ avec la classe de Ruelle-Sullivan $[C_\mu] \in H_n(M, \mathbb{R})$. L'identité de $i : M \to M$ est evidemment une application BT entre le feuilletage $\mathcal{F}$ et le feuilletage à une seule feuille M. Si $\mathcal{L}$ est une triangulation de M alors par un raisonement analogue à celui du théorème 2.5 on peut construire une triangulation $\mathcal{K}$ de $(M, \mathcal{F})$ et une BT-application simpliciale $h : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ qui est une approximation simplicale de i en restriction aux feuilles. Nous avons alors un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} H^n(\mathcal{L}, \mathbb{R}) \arrow[r, "h^*"] \arrow[dr, "\langle\cdot,[C_\mu]\rangle"'] & H^n(\mathcal{K}, \mathbb{R}) \arrow[d, "\langle\cdot,\mathbf{1}\rangle_\mu"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Mais il est bien connu que la classe $e(T\mathcal{F})$ n'est autre que la classe caractéristique $\mathfrak{c}(T^1\mathcal{F}, \mathcal{L})$ qui, d'après le théorème 4.2 est envoyée par h^* sur la classe caractéristique feuilletée $\mathfrak{c}(T^1\mathcal{F}, \mathcal{K})$. Compte tenu de ce qui a été démontré dans l'étape II, on en déduit que:

$$\chi(M, \mathcal{F}, \mu) = \langle e(T\mathcal{F}), [C_\mu]\rangle = \langle \mathfrak{c}(T^1\mathcal{F}, \mathcal{K}), \mathbf{1}\rangle_\mu = \chi(\mathcal{K}, \mu),$$

ce qui complète la preuve du lemme. □

5.7 Preuve du théorème B

L'implication (2)⇒(1) est la plus facile; c'est un corollaire du théorème A. En effet soit $\mathbf{X}$ un champ tangent μ-fini à zéros isolés non dégénérés, la non dégénérescence d'un zéro signifie que son indice local est ± 1; c'est le cas par exemple du champ tangent $\mathbf{Z}$ construit dans le lemme 5.8. Si $\mu(O_\mathbf{X}) < \epsilon$ alors $|\chi(M, \mathcal{F}, \mu)| \leq \mu(O_\mathbf{X}) < \epsilon$. Si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $\mathbf{X}$ vérifiant cela, alors $\chi(M, \mathcal{F}, \mu) = 0$.

Nous prouvons dans ce qui suit l'implication (1)⇒(2). On se fixe donc un feuilletage mesuré ergodique $(M, \mathcal{F}, \mu)$ à caractéristique d'Euler nulle, muni d'une triangulation μ-finie $\mathcal{K}$.

Quelques notations et une proposition technique

On supposera que $(M, \mathcal{F}, \mu)$ est munie d'une orientation et que les n-simplexes de $\mathcal{K}$ sont munis de l'orientation induite. De cette façon on peut voir toute n-cochaîne comme une fonction borélienne $c : \mathcal{K}^{(n)} \to \mathbb{R}$ définie sur les n-simplexes non orientés. Pour tout borélien $A \subset \mathcal{K}^{(n)}$ on notera $\mathbf{1}_A$ la cochaîne qui vaut 1 sur A et 0 partout ailleurs. Remarquons par exemple que le cycle fondamental $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{(n)}}$. On notera $||c|| = \int |c| d\mu$ la norme $L^1(\mu)$ de la cochaîne c. On commence par démontrer la proposition suivante:

Proposition 5.10 *Soit $c \in C^n(\mathcal{K}; \mathbb{Z})$ une n-cocycle dont toutes les valeurs non nulles sont ± 1. Si $\langle c, \mathbf{1} \rangle_\mu = 0$ alors il existe une suite de $(n-1)$-cochaînes η_r telle que*

$$\lim_{r \to \infty} ||c - d\eta_r|| = 0.$$

Preuve de la proposition 5.10

Un *chemin de n-simplexes* est une suite $\sigma_1 \dots \sigma_k$ de n-simplexes telle que σ_i et σ_{i+1} ont une face principale commune pour tout i. Les $(n-1)$-faces $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ d'un chemin seront supposés munies de l'orientation induite par σ_{i+1}, qui est l'opposée de celle induite par σ_i. On remarque enfin que l'on peut voir l'ensemble des chemins comme un borélien de $\cup_k (\mathcal{K}^{(n)})^k$.

Soit $c \in C^n(\mathcal{K}; \mathbb{Z})$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Notons $T_+(c)$ et $T_-(c)$ les boréliens de $\mathcal{K}^{(n)}$ sur lesquels c prend respectivement les valeurs $+1$ et -1. Remarquons que puisque $\langle c, \mathbf{1} \rangle_\mu = 0$ alors on a $\mu(T_+(c)) = \mu(T_-(c))$. On peut supposer que $\mu(T_+(c)) > 0$ car dans le cas contraire il n'y a rien à prouver.

Lemme 5.11 *Pour μ-presque tout $\sigma \in T_-(c)$ il existe un chemin de n-simplexes $\sigma_1 \dots \sigma_n$ tel que $\sigma = \sigma_1$ et $\sigma_n \in T_+(c)$.*

Démonstration. Soient A_+ et A_- les saturés de M formés par les feuilles de $\mathcal{F}$ qui rencontrent respectivement $T_+(c)$ et $T_-(c)$. Puisque ces deux boréliens sont de mesure positive et que la mesure μ est ergodique, le saturé $A_+ \cap A_-$ est de mesure totale, ce qui implique le lemme. $\square$

On suppose que $\mathcal{K}$ est définie par une famille de prismes π_i^p $(i \in I_p)$ comme au §3.3, et on considère l'application borélienne naturelle $i : \mathcal{K}^{(n)} \to I_n$ qui assigne à chaque n-simplexe de $\mathcal{K}$ l'indice du prisme auquel il appartient. On dira qu'un chemin $\sigma_1 \dots \sigma_k \in C^k$ est de type $\alpha \in I_n^k$ si $i(\sigma_l) = \alpha_l$ pour tout l.

Lemme 5.12 *Deux chemins de même type coïncident ou sont disjoints.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la longueur des chemins. Le résultat est évident pour les chemins de longueur 1. Supposons qu'il est vrai pour les chemins de longueur $k-1$. Il a alors deux cas:

a) $\sigma_1 \cap \sigma'_1 \neq \varnothing$, donc $\sigma_1 = \sigma'_1$. Alors puisque deux faces principales d'un simplexe sont d'intersection non vide, on a $\sigma_2 \cap \sigma'_2 \neq \varnothing$, donc $\sigma_2 = \sigma'_2$ et on conclut par l'hypothèse de récurrence.
b) Le même raisonnement montre que $\sigma_1 \neq \sigma'_1$ implique $\sigma_2 \neq \sigma'_2$ et on conclut comme précédemment que les deux chemins sont disjoints. □

Pour tout $i \in I_n$ on désigne $T^i_\pm(c) = T_\pm(c) \cap \pi^n_i$, le borélien des n-simplexes de $T_\pm$ de type i. On notera $D(c)$ l'ensemble de tous les chemins reliant un n-simplexe de $T_-(c)$ à un n-simplexe de $T_+(c)$. Tout chemin de n-simplexes $\sigma_1 \dots \sigma_k \in D(c)$ détermine de façon évidente une $(n-1)$-cochaîne à support dans les faces du chemin et dont le cobord est $\mathbf{1}_{\sigma_k} - \mathbf{1}_{\sigma_1}$. En vertu du lemme précédent on peut recoller les cochaînes correspondant aux chemins de même type $\alpha = i_1 \dots i_k$ pour obtenir une cochaîne borélienne ω^c_α dont le cobord est la n-cochaîne $\mathbf{1}_{T^{i_k}_+(c)} - \mathbf{1}_{T^{i_1}_-(c)}$.

On numérote de façon arbitraire les types de chemins et on désigne par $\alpha(c) = i_1(c) \dots i_k(c)$ le premier type α tel que $||d\omega^c_\alpha|| > 0$, et on pose:

$$\hat{c} = c - d\omega^c_{\alpha(c)}.$$

Lemme 5.13 *Le cocycle $\hat{c}$ vérifie les hypothèses de la proposition 5.10. De plus on a:*

i) $T_\pm(\hat{c}) \subset T_\pm(c)$;
ii) $\alpha(\hat{c}) > \alpha(c)$.

Démonstration. Par hypothèse $c = \mathbf{1}_{T_+(c)} - \mathbf{1}_{T_-(c)}$. On aura alors:

$$\begin{aligned}\hat{c} &= (\mathbf{1}_{T_+(c)} - \mathbf{1}_{T_-(c)}) - (\mathbf{1}_{T^{i_k(c)}_+(c)} - \mathbf{1}_{T^{i_1(c)}_-(c)}) \\ &= \mathbf{1}_{T_+(c) - T^{i_k(c)}_+(c)} - \mathbf{1}_{T_-(c) - T^{i_1(c)}_-(c)}\end{aligned}$$

ce qui montre que les seules valeurs non nulles de $\hat{c}$ sont ± 1 et qui établit la propriété (i). De plus d'après la proposition 5.7 on a $\langle \hat{c}, \mathbf{1} \rangle_\mu = \langle c, \mathbf{1} \rangle_\mu = 0$.

Par ailleurs on a:

$$T_-(\hat{c}) = T_-(c) - T^{i_1(c)}_-(c) \quad \text{et} \quad T_+(\hat{c}) = T_+(c) - T^{i_k(c)}_+(c)$$

donc il n'existe aucun chemin de $D(\hat{c})$ de type $\alpha(c)$. La cochaîne $\omega^{\hat{c}}_{\alpha(c)}$ vérifie alors $||d\omega^{\hat{c}}_{\alpha(c)}|| = 0$, ce qui implique $\alpha(\hat{c}) > \alpha(c)$ par définition. □

Définissons deux suites par récurrence:

(1) $c_0 = c$ et $\eta_0 = \omega^c_{\alpha(c)}$;

(2) $c_{r+1} = \hat{c}_r = c - d\eta_r$ et $\eta_{r+1} = \eta_r + \omega^{c_r}_{\alpha(c_r)}$.

La proposition 5.10 revient donc à prouver:

Lemme 5.14 $\lim_{r\to\infty} ||c_r|| = 0$.

Démonstration. On considère un chemin quelconque $\sigma_1 \dots \sigma_k \in D(c)$ de type α. Puisque $\alpha(c_{r+1}) > \alpha(c_r)$ il existe un r tel que $\alpha(c_r) > \alpha$. En particulier $c_r(\sigma_1) = c_r(\sigma) = 0$. Par conséquent l'ensemble $\cap_r T_-(c_r)$ est composé seulement des $\sigma \in T_-(c)$ dont il ne part aucun chemin arrivant sur $T_+(c)$. Sa mesure est nulle d'après le lemme 5.11. Par conséquent:

$$\lim_{r\to\infty} ||c_r|| = \lim_{r\to\infty} 2\mu(T_-(c_r)) = 0. \qquad \square$$

Fin de la preuve du théorème B

Soit $\mathbf{Z}$ un champ tangent μ-fini á zéros non dégénérés. Quitte à faire une subdivision de $\mathcal{K}$ puis à déformer un peu le champ $\mathbf{Z}$ on peut supposer que T_0 et T_1 ne rencontrent pas le $(n-1)$-squelette de $\mathcal{K}$ et que tout n-simplexe contient tout au plus un zéro de $\mathbf{Z}$. Le champ $\mathbf{Z}$ détermine alors une $(n-1)$-section $g_{\mathbf{Z}}$ du fibré en sphères $T^1\mathcal{F}$ dont le cocycle d'obstruction $c(g_{\mathbf{Z}})$ ne prend que des valeurs ± 1 et 0. De plus d'après le théorème A on a:

$$0 = \chi(M, \mathcal{F}, \mu) = \int_{O_{\mathbf{Z}}} ind_{\mathbf{Z}}(x) d\mu(x) = \langle c(g_{\mathbf{Z}}), \mathbf{1} \rangle_\mu.$$

Le cocycle $c = c(g_{\mathbf{Z}})$ vérifie alors les conditions du lemme précédent, et il est donc limite (pour la norme $L^1(\mu)$) d'une suite de cobords $d\omega_r$. Mais d'après la propriété (2) du théorème 4.1 il existe pour chaque ω_r une $(n-1)$-section g_r de $T^1\mathcal{F}$ telle que ω_r est la cochaîne différence $\omega(g_r, g_{\mathbf{Z}})$). Les cocyles d'obstruction $c(g_r)$ sont à valeurs dans $\{+1, 0, -1\}$ et nous avons $\lim_{r\to\infty} ||c(g_r)|| = 0$. En vertu du théorème 4.1 on peut étendre g_r en un champ tangent sans zéro au dessus des simplexes où $c(g_r)$ s'annule. On peut l'étendre aussi par linéarité au dessus des autres n-simplexes, mais avec une singularité non dégénérée au barycentre du simplexe. Le résultat est une suite de champs tangents μ-finis $\mathbf{X}_r$ à zéros non dégénérés qui vérifie:

$$\lim_{r\to\infty} \mu(O_{\mathbf{X}_r}) \leq \int_{O_{\mathbf{X}_r}} |ind_{\mathbf{X}_r}| d\mu = \lim_{r\to\infty} ||c(g_r)|| = 0$$

ce qui complète la preuve du théorème B.

Un feuilletage mesuré triangulé $(M, \mathcal{F}, \mu)$ est *hypercompact* s'il possède une *filtration compacte simpliciale*, i.e. une suite croissante de boréliens simpliciaux à feuilles compactes $B_n \subset M$ telle que $M - \cup_n B_n$ est un saturé μ-négligeable. Le résultat suivant est un corollaire facile du théorème de Connes-Feldman-Weiss. Dans [6] le lecteur pourra en trouver une preuve:

Proposition 5.15 *Un feuilletage mesuré est hypercompact si et seulement si il est moyennable.*

On se fixe un feuilletage mesuré ergodique orientable $(M, \mathcal{F}, \mu)$ qui est moyennable et à caractéristique d'Euler nulle. On suppose qu'il est muni d'une triangulation μ-finie $\mathcal{K}$, d'une filtration compacte simpliciale B_n comme ci-dessus, et d'une $(n-1)$-section $\mathbf{s}$ de $T^1\mathcal{F}$ dont le cocycle d'obstruction $c(\mathbf{s})$ est à valeurs dans $\{+1, 0, -1\}$. D'après la preuve du théorème A nous avons $\langle c(\mathbf{s}), \mathbf{1}\rangle_\mu = 0$.

Une nouvelle proposition technique

Par des techniques analogues à celles de la proposition 5.10 on a:

Proposition 5.16 *Soit $c \in C^n(\mathcal{K}; \mathbb{Z})$ un n-cocycle dont toutes les valeurs non nulles sont ± 1 et B_n une filtration compacte simpliciale de $(M, \mathcal{F}, \mu)$. Si $\langle c, \mathbf{1}\rangle_\mu = 0$ alors il existe une suite de $(n-1)$-cochaînes η_r telle que:*

(i) Pour tout $r \in \mathbb{N}$ les cochaînes η_r et η_{r+1} coïncident sur B_r;
(ii) $\lim_{r\to\infty} ||c - d\eta_r|| = 0$;

Esquisse de démonstration. On définit des cochaînes $\omega^c_{\alpha(c)}$ comme dans la preuve de la proposition 5.10 mais en considérant seulement les chemins $D_r(c) \subset D(c)$ qui sont contenus dans un B_r. On peut construire ainsi par une récurrence analogue une suite de cochaînes $\omega^{c_{r+1}}_{\alpha(c_{r+1})}$ à support dans $B_{r+1} -$ support $\omega^{c_r}_{\alpha(c_r)}$, de sorte que la cochaîne

$$\eta_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} \omega^{c_r}_{\alpha(c_r)}$$

coïncide avec η_r sur B_{r+1}. Enfin la propriété (ii) est prouvée par le même argument en tenant compte que $M - \cup_r B_r$ est μ-négligeable. $\square$

Fin de la preuve

On se fixe $\mathbf{Z}$ et $g_{\mathbf{Z}}$ comme dans la preuve du théorème B, et on applique le lemme 5.16 au cocycle d'obstruction $c(g_{\mathbf{Z}})$. Nous avons une suite de cochaînes η_r qui par la propriété (2) convergent sur tous les simplexes de $\cup_r B_r$, i.e.

sur μ-presque tout simplexe. Puisque les cocycles $d\eta_r$ sont à valeurs $+1$, 0 ou -1, leur norme $L^1(\mu)$ est bornée par $\mu(\mathcal{K}^{(n)})$ qui est finie par hypothèse. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique alors:

$$||d\eta - c(g_{\mathbf{Z}})|| = \lim_{r\to\infty} ||d\eta_r - c(g_{\mathbf{Z}})|| = 0$$

où η est la cochaîne limite des η_r. On a alors $d\eta = c(g_{\mathbf{Z}})$ sur μ-presque tout n-simplexe. Le théorème 4.4 garantit alors l'existence d'une section de $T^1\mathcal{F}$ de classe MC^0.

5.9 Preuve des théorèmes D et E

On rappelle que si K est un complexe simplicial dénombrable de dimension finie, alors l'opérateur cobord d_i agit continûment sur les espaces de i-chaînes de carré integrable $l^2(\mathcal{K}^{(i)})$. L'espace de Hilbert séparable

$$H^i_{(2)}(K) = \ker d_i / \overline{\mathrm{im}\ d_{i-1}}$$

est appellé communement le i-ème espace de cohomologie l^2 réduite de K. Soit (L, g) une variété de Riemann connexe. On note $\mathcal{H}^i_{(2)}(L, g)$ l'espace de Hilbert des i-formes harmoniques de carré integrable sur (L, g). On rappelle le théorème suivant dû à Dodziuk:

Théorème 5.17 ([13]) *Si (L, g) est une variété de Riemann à géométrie bornée et K une triangulation bornée de (L, g), l'intégration des i-formes sur les i-simplexes définit des isomorphismes d'espaces de Hilbert:*

$$\mathcal{H}^i_{(2)}(L, g) \to H^p_{(2)}(K) \quad (p = 0, \dots, n)$$

Soit g une métrique de Riemann de classe MC^∞ de volume μ-fini et géométrie bornée sur $(M, \mathcal{F}, \mu)$ et $\mathcal{K}$ une triangulation g-bornée de $(M, \mathcal{F}, \mu)$. On définit le i-ème nombre de Betti de $\mathcal{K}$ (resp. de g) comme étant la dimension de Murray-von Neumann (cf. [8,12]) du champ mesurable d'espaces de Hilbert $H^i_{(2)}(\mathcal{K}_L)$ $(L \in \mathcal{F})$ (resp. $\mathcal{H}^i_{(2)}(L, g)$ $(L \in \mathcal{F})$). En symboles:

$$b_i(\mathcal{K}, \mu) = \dim_\mu \{H^i_{(2)}(\mathcal{K}_L)\}_{L\in\mathcal{F}} \quad , \quad b_i(g, \mu) = \dim_\mu \{\mathcal{H}^i_{(2)}(L, g)\}_{L\in\mathcal{F}}$$

Dans ce cas la norme des isomorphismes du théorème 5.17 est uniformement bornée et les dimensions moyennes des deux champs mesurables coïncident (cf. [12,8]), i.e. $b_i(\mathcal{K}, \mu) = b_i(g, \mu)$. En utilisant les propriétés élémentaires de la dimension de Murray-von Neumann $\dim_\mu$ puis la décomposition naturelle

$l^2(\mathcal{K}_L^{(i)}) = \ker d_i \oplus H^i_{(2)}(\mathcal{K}_L) \oplus \overline{\operatorname{im}\, d_{i-1}}$ on obtient:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i b_i(\mathcal{K},\mu) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \mu(\mathcal{K}^{(i)}) = \chi(\mathcal{K},\mu).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{K},\mu) &= \dim_\mu\left(\bigoplus_i \mathcal{H}^{2i}_{(2)}(L,g)\right) - \dim_\mu\left(\bigoplus_i \mathcal{H}^{2i+1}_{(2)}(L,g)\right)\\ &= \dim_\mu(\ker D_g^+) - \dim_\mu(\ker D_g^-)\end{aligned}$$

où D_g^+ (resp. D_g^-) est la restriction de l'opérateur $d^* + d$ aux formes de degré paire (resp. impaire). Ceci démontre le théorème E.

Pour le théorème D, il nous reste à prouver que si $(M,\mathcal{F},\mu)$ est un feuilletage mesuré ergodique de dimension deux à feuilles orientables et caractéristique d'Euler nulle, et g une métrique de Riemann à géométrie bornée et volume μ-fini sur $(M,\mathcal{F},\mu)$ alors μ-presque toutes les feuilles sont paraboliques. On peut supposer que la mesure n'a pas d'atome car dans le cas contraire sont support serait réduit à une feuille compacte de caractéristique d'Euler nulle, i.e. un tore. Si μ n'a pas d'atome alors presuqe toutes les feuilles sont non compactes et ne possèdent donc pas de formes harmoniques de carré intégrable en degré 0 et 2. En particulier $\chi(M,\mathcal{F},\mu) = -b_1(g,\mu) = 0$ en vertu du théorème E, ce qui implique que l'ensemble des feuilles possèdant une 1-forme harmonique de carré intégrable est de mesure nulle. Mais les seules surfaces de Riemann qui ne possèdent pas une telle forme sont les surfaces paraboliques (cf. [15]). Ceci complète la preuve du théorème D.

References

[1] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault, *Amenable groupoids*, Enseignement Math., Geneva, 2000.

[2] M. F. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, in *Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, 43–72. Astérisque, 32-33, Soc. Math. France, Paris, 1976

[3] M. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Invent. Math. **19** (1973), 279–330

[4] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. I.*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 484–530

[5] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. IV.*, Ann. of Math. (2) **93** (1971), 119–138

[6] M. Bermúdez and G. Hector, *Laminations hyperfinies et revêtements*, arXiv:math.DS/0503350.

[7] J. Cheeger and M. Gromov, *L_2-cohomology and group cohomology*, Topology **25** (1986), no. 2, 189–215

[8] A. Connes, *Sur la theorie non commutative de l'intégration*, in *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978)*, 19–143, Lecture Notes in Math., 725, Springer, Berlin, 1979

[9] A. Connes, *A survey of foliations and operator algebras*, in *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, 521–628, Proc. Sympos. Pure Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[10] A. Connes, J. Feldman and B. Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation*, J. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **1** (1981), 431–450.

[11] A. Connes and G. Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 6, 1139–1183

[12] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Reprint of the second (1969) edition, éd. Jacques Gabay, Paris, 1996

[13] J. Dodziuk, *Sovolev spaces of differential forms and de Rham-Hodge isomorphism*, J. Diff. Geom. **16**, 63–73 (1981)

[14] S. Eilenberg, *Cohomology and continuous mappings* , Ann. of Math. (2) **41** (1940), 231–251.

[15] H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer, New York, 1980.

[16] D. Gaboriau, *Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes*, Publ. Math. Inst. Hautes études Sci. No. 95 (2002), 93–150

[17] P. R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.

[18] G. Hector and U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations. Part A*, Vieweg, Braunschweig, 1981

[19] J. L. Heitsch and C. Lazarov, *Homotopy invariance of foliation Betti numbers*, Invent. Math. **104** (1991), no. 2, 321–347

[20] S. Hu, *Homotopy theory*, Academic Press, New York, 1959.

[21] R. Kallman, *Certain quotient spaces are countably separated, III*, J. Functional Analysis 22 (1976), no. 3, 225–241.

[22] A. Kechris, S. Jackson and A. Louveau, *Countable Borel equivalence relations*, J. Math. Logic 2(1) (2002), 1-80

[23] C, Kuratowski, *Topologie. I et II*, Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1992

[24] C. C. Moore and C. Schochet, *Global analysis on foliated spaces*, Springer, New York, 1988

[25] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1984.

[26] D. Ruelle and D. Sullivan, Topology **14** (1975), no. 4, 319–327

[27] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1951.

[28] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhäuser, Basel, 1984.